周期境界値問題に対する特異および特異に近い差分行列のSOR法(数値計算アルゴリズムの現状と展望)

石原, 和夫; 山本, 慎

数理解析研究所講究録
第 880 巻 1994 年 68-69

周期境界値問題に対する特異および特異に近い差分行列の SOR 法

大阪女子大学　石原 和夫　(Kazuo Ishihara)
大阪女子大学　山本 慎　(Makoto Yamamoto)

1．SOR 法.　$Av=b$, $A=D-L-U=(a_{ij})$, $1\le i,j\le n$ とし，$D,-L,-U$ は A の対角，狭義の下三角，狭義の上三角成分，$a_{ii}\ne 0$, $1\le i\le n$, $J=D^{-1}(L+U)$, $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ を J の固有値，ω を加速係数，$H_\omega=(D-\omega L)^{-1}\left[(1-\omega)D+\omega U\right]$, $v_{k+1}=H_\omega v_k+\omega(D-\omega L)^{-1}b, k=0,1,2,\ldots,\rho(J)=\max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|$, $\gamma(J)=\max\limits_{1\le i\le n}\{|\lambda_i|;\lambda_i\ne 1\}$, $\delta(J)=\max\limits_{1\le i\le n}\{|\lambda_i|;|\lambda_i|\ne 1\}$, とする.

補題1 [1, 4]. (i) A が convergent ($\lim\limits_{k\to\infty}A^k=O$) $\Longleftrightarrow$ $\rho(A)<1$.
(ii) $\rho(A)=1$ とする. A が semiconvergent ($\lim\limits_{k\to\infty}A^k$ が存在) $\Longleftrightarrow$ $\gamma(A)<1$ かつ A の固有値 1 に関するすべての elementary divisor が linear .

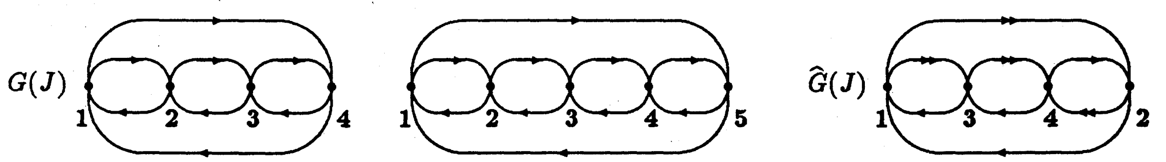
2．差分方程式.　次のような周期境界条件の問題を考える.

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
y''(x)=p(x)y'(x)+q(x)y(x)+r(x), & a\le x\le b\\
y(a)=y(b), \quad y'(a)=y'(b),
\end{array}
\right.
\tag{1}
$$

ここで $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ は周期 $b-a$ の連続関数で，$q(x)\ge 0$ とする. $[a,b]$ を n 等分し，$h=\dfrac{b-a}{n}$ として次のような 2 つのタイプの分点 x_i を考える.

(1) を中心差分近似し，$y(x_i)$ の近似解を v_i とすれば (1) の差分方程式は $Av=b$ となる.

補題2. $h\cdot\max\limits_{a\le x\le b}|p(x)|<2$ とする. n が偶数のとき，J は cyclic of index 2 , n が奇数のとき，J は primitive となる. また，n が偶数，分割タイプ [II] ならば A は 2–cyclic, consistently ordered となる.



$n=4$, cyclic of index 2　　$n=5$, primitive　　consistently ordered

定理1． $p(x) \equiv 0,\ q(x) \equiv 0,\ n$ が偶数, 分割タイプ [II], $b \in \mathrm{Im}A \quad \Longrightarrow \quad A$ は特異. SOR 法は semi-convergent $(0 < \omega < 2)$ で, $Av = b$ の解に収束し, $\omega_{\mathrm{opt}} = \dfrac{2}{1+\sqrt{1-\delta(J)^2}} = \dfrac{2}{1+\sin\frac{2\pi}{n}}, \quad \gamma(H_{\omega_{\mathrm{opt}}}) = \min\limits_{0<\omega<2} \gamma(H_\omega)$.

定理2． $q(x) > 0,\ h \cdot \max_{a \le x \le b} |p(x)| < 2,\ n$ が偶数, 分割タイプ [II], とする.

$$\prod_{i=1}^{n} \left\{1 + \frac{1}{2}p(x_i)h\right\} = \prod_{i=1}^{n} \left\{1 - \frac{1}{2}p(x_i)h\right\} \tag{2}$$

$\Longrightarrow \quad A$ は正則で, SOR 法は convergent $(\rho(H_\omega) < 1,\ 0 < \omega < 2)$,

$$\omega_{\mathrm{opt}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-(\rho(J)^2)}}, \quad \rho(H_{\omega_{\mathrm{opt}}}) = \min_{0<\omega<2} \rho(H_\omega),$$

$$\frac{2}{1+\sqrt{1-\left(\frac{2}{2+q_{\max}h^2}\right)^2}} \le \omega_{\mathrm{opt}} \le \frac{2}{1+\sqrt{1-\left(\frac{2}{2+q_{\min}h^2}\right)^2}}, \quad q_{\max} = \max_{a \le x \le b} q(x), \quad q_{\min} = \min_{a \le x \le b} q(x).$$

さらに, $h = \dfrac{b-a}{n}$ が十分小ならば, $\omega_{\mathrm{opt}} \approx \dfrac{2}{1+\sin\frac{2\pi}{n}}$.

注意． 誤差評価 $|y(x_i) - v_i| = O(h^2)$ は得られる. 定理2の条件を満たさない時, SOR 法は種々の挙動をする. 数値例は講演時に示す. Neumann 型2点境界値問題の SOR 法については [3] 参照.

参考文献

[1] Bermann, A. and Plemmons, R. J., Nonnegative matrices in the mathematical sciences, Academic Press, 1979.

[2] Hadjidimos, A., On the optimization of the classical iterative schemes for the solution of complex singular linear systems, SIAM J. Alg. Disc. Math., 6 (1985), 555 – 566.

[3] Ishihara, K. and Yamamoto, M., Optimum relaxation parameter of SOR iterations for discrete Neumann type arising from two–point boundary value problems, Math. Japon., 39 (1994), to appear.

[4] Varga, R. S., Matrix iterative analysis, Prentice–Hall, 1962.

[5] Young, D., Iterative solution of large linear systems, Academic Press, 1971.